

Álgebra Lineal

1) (Junio-95) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz inversa de AB

b) Hallar el producto de la inversa de B por la inversa de A . ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justificar la respuesta.

(Sol: a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$)

2) (Junio-95) Un automóvil sube cuestas a 54 Km/h. Las baja a 90 Km/h y en llano marcha a 80 Km/h. Para ir de A a B tarda 2 horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 38 minutos. ¿Cuál es la longitud de camino llano entre A y B, si se sabe que A y B distan 192 Km?

(Sol: 120 Km)

3) (Sept-95) a) Discutir, según los valores de m , el sistema $\begin{cases} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{cases}$

b) Resolverlo cuando $m = 5$

(Sol: a) Si $m \neq \pm 1$ SCD; Si $m = -1$, SI; Si $m = 1$, SCI; b) $x = -11/6$, $y = 7/6$)

4) (Sept-95) En una academia de idiomas se imparte inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos

normales y grupos reducidos. La matriz $A = \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$ expresa el número de personas en cada grupo, donde

la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto, respectivamente. Las columnas de la matriz:

$B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.25 & 0.4 & 0.75 \\ 0.8 & 0.75 & 0.6 & 0.25 \end{pmatrix}$ reflejan el porcentaje de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso

reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para uno de los niveles.

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma

b) Sabiendo que la academia cobra 3000 pta. por persona en grupos reducidos y 2000 pta. por persona en grupo normal, hallar la cantidad ingresada en cada uno de los idiomas.

(Sol: a) $\begin{pmatrix} 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix}$; b) 1335000 Inglés; 1009000 Alemán)

5) (Sept-95) En cierto instituto, el 60% del alumnado de 1º de BUP pasa a 2º de BUP, el 85% de 2º de BUP pasa a 3º y el 90% de los 3º pasa a COU. Repiten curso el 15% de 1º, el 10% de segundo, el 5% de 3º y el 4% de COU. El resto abandona sus estudios y no se admiten estudiantes de otros centros salvo para comenzar el ciclo. Además se sabe que el 65% de los estudiantes que terminan EGB se matriculan en dicho instituto en el curso siguiente. Además, el número de personas que finaliza EGB cada año es el 95% de las que terminaron el anterior.

- a) Construir una matriz 5x5 que muestre la evolución entre cursos de la población estudiantil en dicha localidad.
- b) Si en cierto curso, había 700 estudiantes que terminaban EGB, 400 en 1º, 300 en 2º, 200 en 3º y 175 en COU, ¿cuál será la distribución de estudiantes en el curso siguiente?

$$(\text{Sol: a}) \begin{pmatrix} 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.65 & 0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{pmatrix} ; \text{ b) } \begin{pmatrix} 105 \text{ en } 1^\circ \\ 515 \text{ en } 2^\circ \\ 360 \text{ en } 3^\circ \\ 265 \text{ en } 4^\circ \\ 187 \text{ en } \text{COU} \end{pmatrix}$$

6) (Junio-96) Una empresa fabrica tres tipos de artículos: A, B y C. Los precios de coste de cada unidad son 600, 920 y 1.430 pesetas, respectivamente. Los correspondientes precios de venta de una unidad de cada artículo son 1.800, 2.800 y 4.000 pesetas. El número de unidades vendidas anualmente es de 2.240, 1.625 y 842, respectivamente. Sabiendo que las matrices de costes e ingresos C e I , son diagonales y que la matriz de ventas V , es una matriz fila, se pide:

- a) Determinar las matrices C , I y V .
- b) Obtener, a partir de las matrices anteriores, la matriz de ingresos anuales correspondiente a los tres artículos, la matriz de gastos anuales y la matriz de beneficios anuales.

$$(\text{Sol: a}) C = \begin{pmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 920 & 0 \\ 0 & 0 & 1430 \end{pmatrix} ; I = \begin{pmatrix} 1800 & 0 & 0 \\ 0 & 2800 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 \end{pmatrix} ; V = (2240 \ 1625 \ 842)$$

$$\text{b) } IA = (4032000 \ 4550000 \ 3368000) ; GA = (1344000 \ 1495000 \ 1204060) ;$$

$$BA = (2688000 \ 3055000 \ 2163940)$$

7) (Sept-96) a) Sean A una matriz de dimensión 5×4 , B una matriz de dimensión $m \times n$ y C de dimensión 3×7 . Si se sabe que se puede obtener la matriz producto ABC , ¿cuál es la dimensión de la matriz B ? ¿Y de la matriz ABC ?

b) Si A es una matriz, ¿existe siempre el producto $A^T A$? Razone la respuesta.

(Sol: a) La de B 4×3 , la de ABC 5×7 ; b) Siempre que A sea cuadrada)

8) (Sept-96) Una empresa dispone de 2.700.000 pesetas para actividades de formación de sus cien empleados. Tras estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de 40.000 pesetas, para el B es de 16.000 pesetas y es de 20.000 para el C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?

(Sol: 40 el A , 20 el B y 40 el C)

9) (Junio-97) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcular las matrices C y D , sabiendo que $AC = BD = I$, siendo I la matriz identidad de orden dos.

b) Discutir y resolver el sistema dado por: $(C^{-1} - D^{-1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, siendo C^{-1} y D^{-1} las matrices inversas de las matrices C y D indicadas en el apartado anterior

(Sol: a) $C = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$; b) SCI ; $\{(1-3\lambda, \lambda) | \lambda \in R\}$

10) (Sept-97) En una acería se fabrican tres tipos de productos: acero en láminas, en rollos o aceros especiales. Estos productos requieren chatarra, carbón y aleaciones en las cantidades que se indican en la tabla siguiente, por cada unidad de producto fabricado:

	Acero en láminas	Acero en rollos	Aceros especiales
Chatarra	8	6	6
Carbón	6	6	4
Aleaciones	2	1	3

a) Si durante el próximo mes se desean fabricar 6 unidades de acero en láminas, 4 unidades de acero en rollos y 3 unidades en aceros especiales, obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones que serán necesarias.

b) Si se dispone de 34 unidades de chatarra, 28 de carbón y 9 de aleaciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de acero se podrán fabricar con estos materiales?

(Sol: a) 90 de Chatarra, 72 de Carbón y 25 de aleaciones ; b) 458 de láminas, 381 de rollos y 343 especiales)

11) (Junio-98) Se da el sistema
$$\begin{cases} x + my + z = 2 \\ mx + 2z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

- a) Hállense los valores de m para los que sea compatible
 b) Resuélvase, si es posible para $m = 2$

(Sol: a) Siempre ; b) $\{(2-\lambda, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$)

- 12) (Junio-98) Los estudiantes de cierto curso venden camisetas, gorras y banderines para ayudarse a pagar un viaje. Cada camiseta se vende a 800 pesetas, cada gorra a 120 pesetas y cada banderín a 200 pesetas. Los costes de cada prenda son de 300 pesetas por camiseta, 20 por gorra y 80 pesetas por banderín. El beneficio neto obtenido es de 67.400 pesetas y el gasto total es de 34.600 pesetas. Sabiendo que se han vendido un total de 270 unidades en conjunto, calcúlese cuántas se han vendido de cada clase.

(Sol: 100 camisetas, 150 gorras, 20 banderines)

- 13) (Junio-98) En un colegio se imparten clases de 1º, 2º y 3º de ciertas enseñanzas. Los profesores tienen asignado un número de horas de clase, tutorías y guardias a cubrir de acuerdo con la siguiente matriz:

$$M = \begin{array}{c|ccc} & \text{clase} & \text{guardias} & \text{tutorías} \\ \hline 1^\circ & 20 & 5 & 3 \\ 2^\circ & 18 & 6 & 5 \\ 3^\circ & 22 & 1 & 2 \end{array}$$

El colegio paga cada hora de clase a 2.000 pesetas, cada hora de guardia a 500 pesetas y cada hora de tutoría a

1.000 pesetas, según el vector: $C = \begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$

El colegio dispone de 5 profesores para primer curso, 4 para segundo y 6 para tercero, representados por el vector: $P = (5 \ 4 \ 6)$

Calcúlese cada uno de los siguientes productos de matrices e interprétense los resultados:

- a) PM b) MC c) PMC

(Sol: a) $PM = (304 \ 55 \ 47)$; b) $MC = \begin{pmatrix} 45000 \\ 44000 \\ 46500 \end{pmatrix}$; c) $PMC = 682.500$ pts)

- 14) (Sept-98) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Hállese una matriz B tal que $A^{-1}B = A$
 b) Discútase, según los valores de m , el sistema:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} my \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Resuélvase el sistema anterior en aquellos casos en los que sea compatible

(Sol: a) $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) Si $m \neq 1$ SCD, Si $m = 1$ SI ;) $x = \frac{2m+3}{m-1}$; $y = \frac{5}{m-1}$)

15) (Sept-98) Tres recipientes A, B y C, almacenan un total de 72 litros de disolvente. El recipiente A contiene la tercera parte que hay en B y C juntos. Si de B se pasan 4 litros a C y 6 litros a A, se igualan las cantidades que hay en cada recipiente.

a) Plantéese el sistema de ecuaciones lineales que proporciona las cantidades de disolvente que había inicialmente en cada recipiente.

b) Resuélvase el sistema anterior.

(Sol: 18 de A, 34 de B, 20 de C)

16) (Junio-99) Se considera el sistema:
$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a-4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

a) Discútase según los valores de a

b) Resuélvase para $a = 4$

(Sol: a) Si $a \neq 2$ SCD, Si $a = 2$, SI; b) $x = -5, y = -2, z = 9$)

17) (Sept-99) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese $A + A^2$

b) Resuelve el sistema $A^5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Sol: a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2 & 0 \\ 3/10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $x = 20, y = -5, z = -9$)

18) (Junio-00) Sea a un número real cualquiera, se define el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{cases}$$

a) Discútase dicho sistema en función del valor de a

b) Encuéntrense todas sus soluciones para $a = 1$

(Sol: a) Si $a \neq 1$ SCD, Si $a=1$, SCI ; b) $\{(1-\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in R\}$)

19) (Sept-00) Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264.000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del valor del dinero en euros.

Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

(Sol: 165.000 euros, 75.000 dólares, 11.000 libras)

20) (Junio-01) Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

a) Discútase según los valores de a

b) Resuélvase el sistema para $a = -1$

(Sol: a) Si $a \neq 1, -2$ SCD; Si $a=1$, SCI ; Si $a=-2$, SI ; b) $x=y=0, z=-1$

21) (Sept-01) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

a) Determínese si A y B son invertibles y, en su caso, calcúlese la matriz inversa.

b) Resuélvase la ecuación matricial $XA - B = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

c) Calcúlese A^{86} .

(Sol: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, B^{-1} no existe ; b) $X = \begin{pmatrix} -27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A^{86} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$)

22) (Sept-01) Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C. Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto de A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto al precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros. Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

(Sol: A = 25 euros, B = 50 euros, C = 60 euros)

23) (Junio-02) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular las matrices $M = AB$ y $N = BA$
 b) Calcular P^{-1} , siendo $P = N - I$, donde I representa la matriz identidad.
 c) Resolver el sistema $PX = C$

(Sol: a) $M = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -7 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$; b) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$)

24) (Sept-02) Encontrar todas las matrices X tales que $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(Sol: $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4(d-a) & d \end{pmatrix}$)

25) (Junio-03) Estudiar y resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

(Sol: SCI; sol: $\{(\lambda - 2, 1 - \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$)

26) (Sept-03) Calcular los valores de a para los cuales la inversa de la matriz $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ coincide con su traspuesta.

(Sol: $a = \pm 3$)

27) (Junio-04) Hallar todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$

(Sol: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$)

28) (Sept-04) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependientes del parámetro real m :

$$\begin{cases} mx + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ x + my - mz = 1 \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro m .
 b) Resuélvase el sistema para $m = 2$

(Sol: a) Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$, SCD, Si $m = -1$, SI, Si $m = 2$, SCI ; b) $\left\{ \left(\frac{4\lambda+9}{3}, \frac{\lambda-3}{3}, \lambda \right) \mid \lambda \in R \right\}$

29) (Junio-05) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Discutir el sistema para los distintos valores de k .
 b) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.

(Sol: a) Si $k \neq -8$, SCD; Si $k = 8$, SCI ; b) Para $k \neq -8$, $(0,0,0)$; Para $k = 8$, $\left\{ \left(\frac{\lambda}{19}, \frac{7\lambda}{19}, \lambda \right) \mid \lambda \in R \right\}$

30) (Sept-05) Se considera el sistema lineal de ecuaciones que depende del parámetro real p

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + pz = -3 \\ x - 2y - z = p \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema según los distintos valores de p .
 b) Resolver el sistema para $p = 2$

(Sol: a) Si $p \neq 1$, SCD; Si $p = 1$, SI ; b) $x=1, y=0, z=-1$)

31) (Junio-06) Encontrar todas las matrices X cuadradas 2×2 que satisfacen la igualdad $AX = XA$ en cada uno de los dos casos siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(Sol: a) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$)

32) (Sept-06) Se considera el sistema lineal de ecuaciones que depende del parámetro real a

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -2x + 3y + z = 1 \\ -x + ay + 3z = 3 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema según los distintos valores de a .
 b) Resolver el sistema para $a = 2$

(Sol: a) Si $a \neq 4$, SCD; Si $a = 4$, SCI b) $x = 0, y = 0, z = 1$)

33) (Junio-07) Se considera el sistema lineal de ecuaciones que depende del parámetro real a

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + az = 8 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema según los distintos valores de a .
 b) Resolver el sistema para $a = 4$

(Sol: a) Si $a \neq -7/4$, SCD; Si $a = -7/4$, SI b) $x = 1, y = 1, z = 1$)

34) (Sept-07) Se considera el sistema lineal de ecuaciones que depende del parámetro real a

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ \quad + 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- c) Discutir el sistema según los distintos valores de a .
 d) Resolver el sistema para $a = 3$ y $a = 1$

(Sol a) Si $a \neq 1$, SI; Si $a = 1$, SCI ; b) $x = 1, y = 1, z = 1, \left\{ \left(\frac{-\lambda}{2}, \frac{2-\lambda}{2}, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

35) (Junio-08) Un agricultor tiene repartidas 10 hectáreas de terreno en barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo total de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?

(Sol: 2 Ha de Barbecho, 5 de trigo y 3 de cebada)

36) (Sept-08) Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa del tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa del tipo B necesita 15 horas de albañilería, 4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa del tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontanería y 5 de electricista. La empresa emplea exactamente 270 horas de trabajo al mes de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo instala la empresa en un mes?

(Sol: 10 de A, 6 de B y 4 de C)

37) (Junio-09) Se considera el sistema lineal de ecuaciones que depende del parámetro real k

$$\begin{cases} x + y + kz = 4 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema según los distintos valores de k .
 b) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.
 c) Resuélvase el sistema para $k = 0$

(Sol: a) Si $k \neq 1$, SCD; Si $k = 1$, SCI; b) $\{(3-\lambda, 1, \lambda) \mid \lambda \in R\}$; c) $x=3, y=1, z=0$)

38) (Sept-09) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k .

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + ky + z = 3 \\ kx - 3z = 6 \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema según los valores de k .
 b) Resuélvase el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.
 c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

(Sol: a) Si $k \neq 1$ y $k \neq -3$ SCD, Si $k = 1$ SCI, Si $k = -3$ SI; b) $\{(6+3\lambda, -3-4\lambda, \lambda) \mid \lambda \in R\}$; c) $x=5/2, y=0, z=1/2$)

39) (Junio-10 –Fase General) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k .

$$\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ 2x - ky + z = 2 \\ x - y - z = k - 1 \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema según los valores de k .
 b) Resuélvase el sistema para el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.
 c) Resuélvase el sistema para $k = 3$

(Sol: a) Si $k \neq -1$ y $k \neq 2$, SCD; Si $k = -1$, SI; Si $k = 2$, SCI; b) $\{(1+\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in R\}$; c) $x=3; y=5/4; z=-1/4$)

40)(Junio-10-Fase Específica) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k .

$$\begin{cases} kx - 2y + 7z = 8 \\ x - y + kz = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema según los valores de k .
 b) Resuélvase el sistema para el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.
 c) Resuélvase el sistema para $k = 0$

(Sol: a) Si $k \neq -1$ y $k \neq 2$, SCD; Si $k = -1$, SI; Si $k = 2$, SCI; b) $\left\{ \left(\lambda - \frac{2}{3}, \lambda, \frac{4}{3} \right) \mid \lambda \in R \right\}$; c) $x=12; y=10; z=4$)

41) (Sept-10-Fase General) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix}$$

- a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro a .
 b) Resuélvase el sistema para el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.
 c) Resuélvase el sistema para $a = 0$

a) Si $k \neq 3$, SCD; Si $k = 3$, SCI ; b) $\left\{ \left(5 + \frac{\lambda}{5}, -4 + \frac{4\lambda}{5}, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

42) (Sept-10-Fase Específica) Se consideran las matrices .

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcúlense los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1} .
 b) Para $a = -1$, calcúlese la matriz inversa A^{-1} .
 c) Para $a = 0$, calcúlense todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$

(Sol: a) $a = 0, 1, 2$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}$; c) $\{(-\lambda, -\lambda/2, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

43) (Junio-11) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a .

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ ay + z = 1 \\ ax + y + az = a \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a .
 b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
 c) Resuélvase el sistema para $a = 3$

(Sol: a) Si $a \neq 1$ y $a \neq 0$, SCD; Si $a = 1$, SCI ; Si $a = 0$, SI ; b) $\{(0, 1 - \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; c) $x = \frac{8}{9}; y = \frac{1}{3}; z = 0$

44) (Junio-11) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcúlense los valores de k para los que la matriz A es invertible.
 b) Para $k = 0$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}

c) Para $k=0$, resuélvase la ecuación matricial $AX = B$

(Sol: a) Si $k \neq 1, k \neq 3$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$)

45) (Sept-11) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcúlense a, b para que se verifique la igualdad $AB = BA$

b) Calcúlense c, d para que se verifique la igualdad $A^2 + cA + dI = O$

c) Calcúlense todas las soluciones del sistema lineal: $(A - I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Sol: a) $a = 0, b = 2$; b) $c = -1, d = 0$; c) $\{(0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

46) (Junio-12) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a .

$$\begin{cases} x & + ay & - 7z & = & 4a - 1 \\ x & + (1 + a)y & - (6 + a)z & = & 3a + 1 \\ & ay & - 6z & = & 3a - 2 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a .

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema en el caso $a = -3$

(Sol: a) Si $a \neq -2$ y $a \neq 3$, SCD; Si $a = -2$, SCI; Si $a = 3$, SI; b) $\{(-1 + \lambda, 4 - 3\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; c) $x = -\frac{4}{3}$; $y = \frac{7}{3}$; $z = \frac{2}{3}$)

47) (Junio-12) Un estadio de fútbol con capacidad para 7200 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.

b) Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.

c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

(Sol: 26000 socios de A, 32500 de B)

48) (Sept-12) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k .

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ky + 2z = 5 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k .

b) Resuélvase el sistema para $k = 0$.

c) Resuélvase el sistema para $k = 2$.

(Sol: a) Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, SCD; Si $k = 2$, SCI; Si $k = 1$, SI; b) $x = 1; y = -1; z = 2$; c) $\{(-1, 3 - \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$)

49) (Junio-13) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}

b) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por: $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Sol: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $x = 1, y = -1, z = 1$)

50) (Junio-13) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a .

$$\begin{cases} ax - 2y = 2 \\ 3x - y - z = -1 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$

b) Resuélvase el sistema para $a = 1$.

(Sol: a) Si $a \neq -4$, SCD; Si $a = -4$, SI; b) $x = 2/5; y = -4/5; z = 3$)

51) (Sept-13) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese la matriz inversa de A

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B - I$, donde I es la matriz identidad

(Sol: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$)

52) (Sept-13) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} kx + y & = 0 \\ x + ky - 2z & = 1 \\ kx - 3y + kz & = 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro k

b) Resuélvase el sistema para $k = 1$.

(Sol: a) Si $k \neq 0, -3, 3$, SCD; Si $k = 0$, SCI; Si $k = \pm 3$, SI b) $x = 1/8; y = -1/8; z = -1/2$)

53) (Junio-14) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular $(A^t B)^{-1}$ donde A^t denota la traspuesta de la matriz A

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(Sol: a) $\begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $x = 1; y = -2$)

54) (Junio-14) Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a

$$\begin{cases} x + y + az & = 2 \\ 3x + 4y + 2z & = a \\ 2x + 3y - z & = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro a

b) Resuélvase el sistema para $a = -1$.

(Sol: a) Si $a \neq 3$, SCD; Si $a = 3$, SCI; b) $x = 3; y = -2; z = -1$)

55) (Sept-14) Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real λ

$$\begin{cases} 2x - \lambda y + z & = -\lambda \\ 4x - 2\lambda y + 2z & = \lambda - 3 \end{cases}$$

a) Determinénse los valores del parámetro real λ que hacen el que el sistema sea incompatible.

b) Resuélvase el sistema para $\lambda = 1$

(Sol: a) $\lambda \neq 1$; b) $\left\{ \left(\frac{-1+s-t}{2}, s, t \right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$)

56) (Sept-14) Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese $(A \cdot A^t)^{200}$

b) Calcúlese $(A \cdot A^t - 3I)^{-1}$

(Sol: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$)